Mathématiques Exercices Option T

Exercice I.

Soient E l'espace euclidien orienté $\mathbf{R}^3$, $B = (i,j,k)$ une base orthonormée directe de E. On note (x/y) le produit scalaire des vecteurs x et y. Pour tout vecteur $u \in E$, tel que $(u/u) = 1$ on définit l'application f_u de E dans E par la relation :

$$(1) \qquad f_u(x) = x - 2(u/x)u.$$

1°) Vérifier que f_u est un endomorphisme de E. Est-ce une isométrie ?

2°) Calculer $f_u(u)$.

Calculer $f_u(v)$ lorsque v est un vecteur orthogonal à u.
En déduire les valeurs propres et les sous-espaces propres de f_u. Interpréter f_u géométriquement.

3°) Soient $u = k$, $u' = (-\sin\theta)j + (\cos\theta)k$, ($\theta$ réel donné).
Ecrire la matrice dans la base B de chacun des endomorphismes :

$$f_u, \quad f_{u'} \quad et \quad f_{u'} \circ f_u .$$

Interpréter géométriquement $f_{u'} \circ f_u$.

4°) Ce dernier résultat est-il généralisable au cas de deux vecteurs u, u', quelconques mais de norme 1, de E ? (On évitera les calculs).

Exercice II.

L'espace affine euclidien $\mathbf{R}^3$ est rapporté au repère orthonormé $R = (O,i,j,k)$. Soit D la droite d'équations :

$$z = 0 , \quad x+y = a \quad (a \text{ réel } >0 \text{ donné}).$$

On désigne par C_1 (resp. C_2) la surface de révolution engendrée par rotation de D autour de l'axe (O, i) (resp.(O, j)).

1°) Déterminer des équations cartésiennes de C_1 et de C_2. Préciser la nature géométrique de ces surfaces.

2°) Soit le repère $R' = (O,I,J,K)$ déduit de R par rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ autour de l'axe (O,k).
Déterminer l'équation de C_1 et de C_2 dans ce nouveau repère.

3°) Soit L l'intersection de C_1 et C_2. Déterminer les équations des projections de L sur les plans (O,I,J) et (O,I,K). Préciser la nature géométrique de ces projections. Peut-on en déduire la nature géométrique de L ?

4°) Soit S le solide limité par C_1, C_2 et contenu dans la partie de l'espace définie par :

$$x \geq 0 \quad , \quad y \geq 0 \quad , \quad z \geq 0 \quad .$$

Tracer une figure représentant ce solide.
Calculer le volume de S. (Il pourra être commode d'utiliser le repère R').

Exercice III.

Soit l'équation différentielle : (2) $xy'' + y' + y = 0$.

1°) Déterminer les solutions de (2) de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

On précisera successivement :

a) la relation de récurrence vérifiée par la suite (a_n) ;
b) l'expression de a_n (à l'aide de factorielles) ;
c) le rayon de convergence de la série.

2°) On désigne par f, celle des solutions de (2) déterminées ci-dessus, qui vérifie de plus :

$$f(0) = 1 .$$

a) Quel est le sens de variation de f pour $x \leq 0$?
b) Montrer que f est décroissante sur [0,2].

3°) Déterminer les limites suivantes : $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ *et* $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$

4°) Calculer une valeur approchée à 10^{-3} près des nombres : $f(1)$ et $f(2)$.
Que peut-on en déduire ?

Exercice IV.

$\mathscr{C}$ étant l'espace vectoriel des applications continues de [-1,1] dans $\mathbf{R}$, A,B,u,v étant des nombres réels tels que $u < v$, on définit les applications S et I de $\mathscr{C}$ dans $\mathbf{R}$ par les relations :

$$S(f) = Af(u) + Bf(v) \quad \text{et} \quad I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx .$$

On veut déterminer A, B, u et v de telle sorte que la relation :

$$(3) \quad S(\mathrm{P}) = I(\mathrm{P})$$

soit vérifiée pour tout polynôme P de degré $\leq$ n, n étant maximal.

1°) Vérifier que I et S sont des applications linéaires.
Ecrire les équations qui traduisent (3) pour les polynômes de degré $\leq$ n .

2°) On prend n = 3 . Montrer qu'il existe un choix unique de A, B, u et v tel que (3) soit vérifiée pour les polynômes de degré ≤ 3 . Préciser les valeurs de A, B, u et v .
(On pourra, dans le système d'équations étudié, prendre A et B pour inconnues, et considérérer u et v comme des paramètres).

3°) Calculer, pour ce choix de A, B, u et v la valeur de

$$I(x^4) - S(x^4) .$$

Quelle est la valeur maximale de n ?
On peut montrer - et on admettra - qu'il existe une constante K telle que pour toute fonction f de classe C^4

$$(4) \quad I(f) - S(f) = Kf^{(4)}(\xi)$$

où ξ est un élément de [-1, 1], dépendant de f. Déterminer la valeur de K .

4°) On prend pour f la fonction : $x \to \frac{1}{x+3}$.
Déduire de la relation (4) un majorant de $|I(f) - S(f)|$ et donner un encadrement de ln 2.